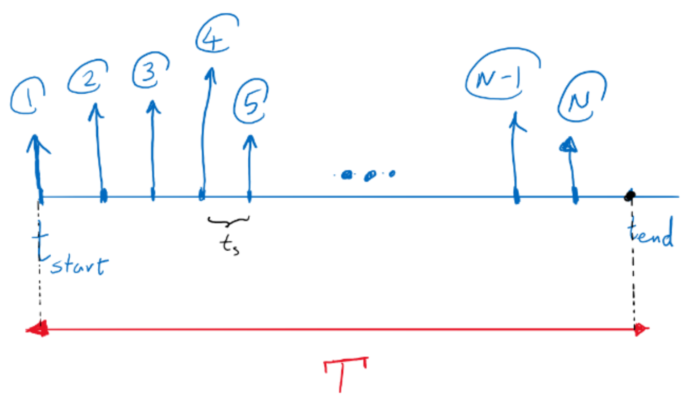
به نام او

تمرین سری سوم

مهلت تحویل: چهارشنبه ۲۱ آبان ساعت ۱۷:۰۰

بخش اول:

فرض کنید در MATLAB، در حوزه ی زمان، یک سیگنال (بردار x به طول N سمپل و معادل T ثانیه) داریم ($t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{T}{N}$) و می خواهیم آن را به حوزه ی فوریه ببریم. (به شکل زیر نگاه کنید). در واقع f_s فرکانس نمونه برداری و t_s فاصله ی زمانی بین دو سمپل را نشان می دهد. این دو پارامتر به ما می گویند که از سیگنال پیوسته اصلی به چه صورت نمونه برداری شده است و سیگنال گسسته ی فعلی تولید شده است. برای رسم دقیق سیگنال در حوزه ی زمان اگر بازه ی زمانی مربوط به سیگنال معلوم باشد $t = t_{start}: t_s: t_{end} - t_s$ به طوری که $t_{start} - t_{end} = T$ ، می توان به راحتی آن را با دستور $\text{plot}(t, x)$ رسم کرد.



برای بردن سیگنال به حوزه ی فوریه از دستور $y = \text{fftshift}(\text{fft}(x))$ استفاده می کنیم. fft دستور اصلی است و fftshift فقط بازه ی متقارن حول فرکانس صفر را ایجاد می کند. خروجی این دستور یعنی y یک بردار با N سمپل است که هر درایه ی آن یک عدد مختلط است لذا هر درایه یک اندازه و یک فاز دارد. نکته ی مهم در این جا این است که هر یک از این N عدد به دست آمده متعلق به چه فرکانسی می باشد؟

فرکانس ها به صورت $f = \frac{-f_s}{2} : \frac{f_s}{N} : \frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{N}$ خواهند بود. بنابراین برای رسم اندازه می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{abs}(y))$ و برای رسم فاز می توان از دستور $\text{plot}(f, \text{angle}(y))$ استفاده کرد.

راجع به بازه ی فرکانس های در نظر گرفته شده (هایلایت سبز)، دو نکته ی زیر حائز اهمیت است:

نکته ی اول:

اگر خاطرتان باشد در درس سیگنال گفته می شد بیشترین فرکانس (از منظر تغییرات سریع زمانی) در حوزه ی گسسته فرکانس $\frac{1}{2}$ است که در این جا می بینید جای آن عدد $\frac{f_s}{2}$ نشسته است. در واقع در سرتاسر درس سیگنال نرخ نمونه برداری برابر $f_s = 1$ هرتز در نظر گرفته می شود (یک سمپل در هر ثانیه). از این نکته می توان نتیجه گرفت هر چه از سیگنال پیوسته در حوزه ی زمان با نرخ بالاتری نمونه برداری کنیم ($f_s \uparrow$)، در سیگنال گسسته به دست آمده، می توان فرکانس های بالاتر را نیز (در صورت وجود) مشاهده کرد چون بازه ی فرکانسی قابل مشاهده افزایش پیدا می کند. در حالت حدی، اگر نرخ نمونه برداری به سمت بی نهایت برود (یا به عبارت دیگر ($t_s \to 0$) برود، عملا سیگنال گسسته به دست آمده با سیگنال پیوسته اصلی یکی خواهد بود و هر مولفه ی فرکانسی که در سیگنال اصلی بوده است، در سیگنال گسسته نیز مشاهده می شود. در این قسمت کاملا باید درک کرده باشید که در sampling که یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته تبدیل می کند چه چیزی از بین می رود.

نکته ی دوم:

نکته ی دوم راجع به رزولوشن فرکانسی است که ایجاد شده است یعنی $\delta_f = \frac{f_s}{N}$ (هایلات سبز را نگاه کنید). اگر از رابطه ای که با هایلایت زرد رنگ مشخص شده است استفاده کنید می توان دید که رزولوشن فرکانسی برابر است با $\delta_f = \frac{1}{T}$، یعنی رزولوشن فرکانسی برابر با عکس طول زمانی سیگنال است و هیچ ربطی هم به نرخ نمونه برداری f_s ندارد. هرچه می خواهید نرخ نمونه برداری را افزایش دهید اما رزولوشن فرکانسی مادامی که طول زمانی سیگنال (T ثانیه) تغییری نکند هیچ تغییری نمی کند. حال ببینیم مفهوم رزولوشن چیست؟ رزولوشن فرکانسی گام های فرکانسی است که می توان در نظر گرفت تا سیگنال گسسته را در فضای فوریه توصیف کرد. این مفهوم را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید طول زمانی یک سیگنال $T = 1$ ثانیه است و نرخ نمونه برداری $f_s = 20\ Hz$ است. بنابراین رزولوشن فرکانسی برابر $\delta_f = 1\ Hz$ می شود و بازه ی فرکانسی که در حوزه ی فوریه ی سیگنال نمونه برداری شده می توان مشاهده کرد به صورت $f = -10 : 1 : 9$ هرتز خواهد بود (هایلات سبز).

اگر سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تُن به صورت

$$x_1(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + \exp(1j * 2\pi * 8 * t)$$

باشد، طبیعتا قله هایی در اندازه ی سیگنال در حوزه ی فوریه، در فرکانس های 8 و 5 هرتز مشاهده خواهید کرد.

حال فرض کنید سیگنال اصلی حاوی دو سیگنال تک تن به صورت

$$x_2(t) = \exp(1j * 2\pi * 5 * t) + exp(1j * 2\pi * 5.1 * t)$$

باشد. در این حالت فقط یک قله در اندازه ی سیگنال در حوزه ی فوریه، در فرکانس 5 هرتز مشاهده خواهید کرد و دیگر توانایی تفکیک این دو سیگنال را در حوزه ی فوریه نخواهید داشت زیرا اختلاف فرکانس دو سیگنال تک تُن کمتر از $\delta_f = 1\ Hz$ می باشد. بنابراین رزولوشن فرکانسی قدرت تفکیک پذیری فرکانسی را در حوزه ی فوریه نشان می دهد. حتما این مثال را به عنوان "تمرین شماره ی ۱-۰" در نظر بگیرید و آن را در متلب شبیه سازی کنید و نتایج را گزارش کنید تا بهتر آن را درک کنید. بازه ی زمانی سیگنال را از $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه در نظر بگیرید.

حال به سراغ بخش اول تمارین می رویم. قبل از آن توجه داشته باشید در هر سوالی که از شما خواسته شده اندازه تبدیل فوریه را رسم کنید، ماکزیمم خروجی را برابر یک در نظر بگیرید. برای این کار کافی است خروجی دستور $\mathrm{fftshift(fft}(x))$ یعنی y را به $\max(\mathrm{abs}(y))$ تقسیم کنید. دلیل این است که دستور fft یک ضریب ثابتی به تبدیل فوریه اضافه می کند که برای ما اهمیتی ندارد. همچنین از دستورهای ylim و xlim به درستی استفاده کنید تا سیگنال ها به خوبی نمایش داده شوند. برای رسم ها اگر تمایل داشتید می توانید از دستور db استفاده کنید تا تغییرات کوچک بهتر نمایش داده شوند.

تمرین ۱-۱)

سیگنال $x_1(t) = \cos\,(10\,\pi t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

تمرین ۱-۲)

سیگنال $x_2(t) = \prod(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

تمرین ۱-۳)

سیگنال $x_3(t) = x_1(t)x_2(t) = \cos{(10\,\pi t)}\prod(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. همان طور که مشاهده می کنید شکل کلی نتیجه به دست آمده با نتیجه ی قسمت ب تطابق دارد.

* توجه داشته باشید هر چه طول پالس Π افزایش پیدا کند، سیگنال $x_3(t)$ به سیگنال $x_1(t)$ شبیه تر خواهد شد و بنابراین دو ضربه در فرکانس های 5 و 5- هرتز بهتر نشان داده خواهند شد.

تمرین ۱-۴)

سیگنال $x_4(t) = \cos\left(30\,\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ را در نظر بگیرید.

الف) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = 0$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 100\ Hz$ رسم کنید.

ب) فاز تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید. برای این کار ابتدا فاز فرکانس هایی که اندازه ی تبدیل فوریه در آنها ناچیز است را برابر صفر کنید و سپس فاز را به صورت مضربی از π نمایش دهید. برای این کار از دستور زیر استفاده کنید.

```
tol = 1e-6;
y(abs(y) < tol) = 0;

theta = angle(y);

plot(f,theta/pi)
xlabel 'Frequency (Hz)'
ylabel 'Phase / \pi'
```

ج) به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید. آیا نتایج به دست آمده در قسمت الف و ب با مقدار تئوری مطابقت دارد؟

تمرین ۱-۵)

سیگنال $x_5(t) = \sum_{k=-9}^{9} \prod(t-2k)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -19$ تا $t_{end} = 19$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) سیگنال $x_5(t)$ به نوعی متناوب شده ی سیگنال $x_2(t) = \prod(t)$ است. چرا یک تعدادی ضربه در خروجی مشاهده می کنید؟ فواصل ضربه هایی که مشاهده می کنید چه قدر است؟ همان طور که مشاهده می کنید نتایج با آنچه در درس تحت موضوع "تبدیل فوریه سیگنال های متناوب" آموختیم تطابق دارد.

بخش دوم:

فرکانس یعنی تغییرات در حوزه زمان و تبدیل فوریه قرار است ما را از حوزه زمان به حوزه فرکانس ببرد. پس هرچه تغییرات در حوزه زمان شدید تر باشد یعنی تابع ما دارای فرکانس های بالا تری است و وقتی از آن تبدیل فوریه بگیریم فرکانس های بالاتری در تبدیل فوریه آن ظاهر میشود.

شدید ترین تغییرات در حوزه زمان چیست؟ مسلما ناپیوستگی شدید ترین تغییرات در حوزه زمان است پس تمام توابعی که ناپیوستگی دارند تبدیل فوریه آن ها باید بزرگترین فرکانس ها را نیز شامل شود. این یعنی باید فرکانس های بی نهایت و منفی بی نهایت را نیز داشته باشد. هم چنین برای بیان کردن این تغییرات تعداد محدودی فرکانس پاسخ گو نخواهد بود پس تبدیل فوریه آن فقط روی بخش محدودی از محور فرکانس مقدار ندارد و باید از ∞- تا ∞+ گسترده باشد.

کندترین تغییرات در زمان چیست؟ طبیعتا تابع ثابت هیچ تغییری در حوزه ی زمان ندارد که تبدیل فوریه ی آن فقط یک ضربه در فرکانس صفر می شود. بنابراین اگر یک تابع در حوزه زمان تغییرات زیادی نداشته باشد و ناپیوستگی هم نداشته باشد دارای فرکانس های بالایی نیست و با فرکانس های پایین تغییرات آن قابل بیان است.

حال با توجه به مقدمه ی دوم به تمارین بعدی پاسخ دهید.

تمرین ۲-۱)

سیگنال $x_6(t) = \delta(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) با توجه به مقدمه ی دوم، دلیل آنچه مشاهده می کنید را شرح دهید. همچنین به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید.

تمرین ۲-۲)

سیگنال $x_7(t) = 1$ را در نظر بگیرید.

الف) این سیگنال را در حوزه ی زمان با در نظر گرفتن بازه ی زمانی $t_{start} = -1$ تا $t_{end} = 1$ ثانیه و فرکانس نمونه برداری $f_s = 50\ Hz$ رسم کنید.

ب) اندازه ی تبدیل فوریه ی این سیگنال را با همان مفروضات قسمت الف رسم کنید.

ج) با توجه به مقدمه ی دوم، دلیل آنچه مشاهده می کنید را شرح دهید. همچنین به صورت تئوری تبدیل فوریه ی پیوسته این سیگنال را حساب کنید.