به نام خدا

تمرین سری ششم (موعد تحویل ۴ شنبه ۱۲ آذر ساعت ۵ بعد از ظهر)

--- لطفا تصویر کدهای MATLAB که می زنید را درگزارشتان قرار دهید ---

سوال ۱) سیگنال s_1 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [2.5 -2.5] می باشد با T=1000 نمونه و سیگنال s_2 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [1.5 -1.5] می باشد با T=1000 نمونه تولید کنید. در صورت وجود میانگین در منابع، میانگین منابع را حتما صفر کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی توسط ماتریس مخلوط کننده $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2.2 & -1 \\ 3.1 & -2 \end{bmatrix}$ ترکیب کنید و مشاهدات y_1 و y_2 و y_3 را تولید کنید.

$$Y_{3\times T} = A_{3\times 2}\, S_{2\times T}$$

أ) پراکندگی مشاهدات را در فضای سه بعدی (دستور scatter3) رسم کنید. همان طور که مشاهده می کنید با این که مشاهدات سه بعدی هستند، اما عملا در یک فضای دو بعدی پراکنده شده اند. با محاسبه ی ماتریس R_x و اعمال تحلیل PCA (توسط دستور eig) ماتریس بردارهای ویژه (U) و ماتریس قطری مقدار ویژه (D) را به دست آورید.

ب) سعی کنید هر سه گزاره ی زیر را به صورت مفهومی درک کنید. بردار ویژه ها را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک، به صورت u_1 ، u_2 و u_3 در نظر بگیرید.

* یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با u_3). این اتفاق یعنی داده ها در جهت u_3 تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T Y = 0$.
* u_3 بر ستون های ماتریس A عمود است زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T Y = 0$.
* u_1 و u_2 در همان فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $A = [u_1 \;\; u_2\;]\, C_{2\times 2}$. درایه های ماتریس C را به دست آورید.

ج) چون یکی از مقادیر ویژه صفر است می توان بدون از دست دادن هیچ گونه اطلاعاتی، داده ها را به فضای دو بعدی برد. ماتریسی که می تواند بُعد اضافی داده ها را حذف کند و همچنین آنها را در فضای جدید سفید کند به دست آورید $(Z_{2\times T} = B_{2\times 3}X_{3\times T})$. داده های سفید شده $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را رسم کنید. توجه داشته باشید داده ی سفید یعنی ماتریس همبستگی آن یک ماتریس همانی است!

د) تبدیل SVD را $(Y = Q\ G\ V^T)$ روی ماتریس مشاهدات اولیه به صورت $[Q, G, V]$=svd(Y) اعمال کنید . رتبه (یا Rank) ماتریس Y چند است؟ رابطه ی ماتریس Q با U ، ماتریس G با D و ماتریس V^T با Z چیست؟

ه) در قسمت ب دیدیم که u_1 و u_2 در فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. حال نشان دهید که سطرهای اول و دوم ماتریس V^T یعنی v_1^T و v_2^T یا همان $z_1(t)$ و $z_2(t)$ نیز در فضای سطر های ماتریس S یعنی s_1^T و s_2^T قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی

$$S_{2\times T} = F_{2\times 2}\, Z_{2\times T}$$

درایه های ماتریس F را به دست آورید.

با توجه به این نتایج می توان دریافت که سیگنال منابع بر سطرهای سوم تا Tمُ ماتریس V^T عمود است.

و) اگر از ما بخواهند که بُعد داده های اولیه X را تا حد ممکن کاهش دهید به گونه ای که حداقل ۹۰ درصد انرژی کل مشاهدات ($E_{tot}=E_1+E_2+E_3$) حفظ شود، چگونه این کار را انجام می دهید؟ داده ها را در فضای با بعد تقلیل یافته بر حسب زمان رسم کنید.

سوال ۲) یک رادار پالسی با اطلاعات زیر را در نظر بگیرید:

- ✓ فرستنده ی رادار شامل یک آنتن است که در فرکانس $f_c = 150\ MHz$ کار می کند. عرض پالس برابر $\tau = 10\ \mu sec$ و $PRI = 0.1\ msec$ است.
- ✓ گیرنده ی رادار یک آرایه ی یکنواخت عمودی شامل M=10 المان است. فاصله ی آنتن اول از زمین برابر یک متر و فاصله ی سایر آنتن ها از یکدیگر نیز برابر یک متر می باشد.
- ✓ فرستنده و گیرنده در یک مکان قرار دارند.
- ✓ زمان ضبط سیگنال ($T_{recording}$) در گیرنده برابر 1 میلی ثانیه و نرخ نمونه برداری برابر $f_s = 1\ MHz$ می باشد.

فرض کنید دو هدف متحرک با داپلرهای $f_{d_1} = 2\ KHz$ و $f_{d_2} = 1\ KHz$ و فاصله های $R_1 = R_2 = 6\ Km$ در زوایای ارتفاعی $\theta_1 = 10$ و $\theta_2 = 20$ درجه قرار دارند.
سیگنال باند پایه دریافتی از این دو هدف در آنتن mم به صورت زیر است:

$$y_m = e^{jkd_m \sin(\theta_1)}\, s_l\left(t - \frac{2R_1}{C}\right) e^{j2\pi f_{d_1} t} + e^{jkd_m \sin(\theta_2)}\, s_l\left(t - \frac{2R_2}{C}\right) e^{j2\pi f_{d_2} t} + noise_m$$

این سیگنال را در هر آنتن تولید کنید. نویز را گوسی (مختلط) و مستقل از منابع با میانگین صفر و واریانس 1 در نظر بگیرید. دامنه ی $s_l(t)$ را هم برابر یک در نظر بگیرید.

حال فقط فرض کنید مشاهدات را داریم.

الف) از روی مشاهدات و با استفاده از روش beamforming زوایای ارتفاعی منابع را بیابید.

ب) از روی مشاهدات و با استفاده از روش MUSIC زوایای ارتفاعی منابع را بیابید.

ج) از روی مشاهدات و با فرض معلوم بودن رنج اهداف (R=6 km)، با استفاده از روش beamforming داپلر اهداف را تخمین بزنید.

د) از روی مشاهدات و با فرض معلوم بودن رنج اهداف (R=6 km)، با استفاده از روش MUSIC داپلر اهداف را تخمین بزنید.